

التمرين الأول

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 (\ln x)^4, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + 3\sqrt{x})}{\ln(1 + 2x^2)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \ln(x+1)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$$

التمرين الثاني

حل في \mathbb{R} ما يلي :

$$(\ln x)^3 - \ln x = 0, \quad (\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0, \quad 2 \ln(x-2) - \ln(x+3) = 0 \quad (1)$$

$$\ln x > -1 + \ln 2, \quad \ln x - 2 \geq \frac{4}{\ln x}, \quad \ln(x^2 - x) + \ln\left(\frac{1}{3x+4}\right) < 0 \quad (2)$$

التمرين الثالث

$$(1) \text{ بيه أه } (\forall x \in]0, +\infty[) \ln(1+x) \leq x \leq (x+1) \ln(1+x)$$

$$(2) \text{ أ- بيه أه } \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e^n \leq \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$$\text{ب- استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$$

التمرين الرابع

$$(1) \text{ أ- بيه أه } (\forall t \in]0, +\infty[) \ln t \leq t - 1$$

$$\text{ب- استنتج أه } (\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) x \ln x \geq x - 1$$

$$(2) \text{ بيه أه } (\forall x \in [1, +\infty[) x \ln x \leq \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

(3) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x \ln x$

أ- أدرسه منحنى تغييرات الدالة f و صم جدول تغييراتها

ب- ليكن n عدد من \mathbb{N}^* . بيه أه المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n و أه $1 < a_n < e$

ج- أدرسه رتبة المتتالية $(a_n)_{n \geq 1}$ و استنتج أنها متقاربة

$$\text{د- بيه أه } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \leq a_n \leq 1 + \frac{1}{n} \text{ ثم استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

التمرين الخامس

ليكن n عددا طبيعيا و بحيث $n \geq 3$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^2 - 2n \ln x$

$$(1) \text{ أ- أحسب النهايتيه } \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$$

ب- أدرسه منحنى تغييرات الدالة f_n و أنجز جدول التغييرات

(2) بيه أه المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حليه مختلفيه u_n و v_n بحيث $u_n < \sqrt{n} < v_n$

$$(3) \text{ أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \text{ و بيه أه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(2n)} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \text{ أ- بيه أه } (\forall n \geq 3) u_n \geq 1$$

ب- تحقق أه $f_{n+1}(u_n) = -\ln u_n$ و استنتج أه المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية

ج- بيه أه $u_n \leq e^{2^n}$ ($\forall n \geq 3$) و استنتج أه $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين السادس

(1) بيه أه $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \ln x \leq x - 1$

(2) ليك $n \in \mathbb{N}$ و بحيث $n \geq 2$. $x_1; x_2; \dots; x_n$ و $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ أعداد حقيقية موجبة

بحيث $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ و نضع $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$

أ- بيه أه ليك $k \in \{1; 2; \dots; n\}$ لدينا : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

ب- استنتج أه $\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right)$

ج- بيه أه : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}\right)$

د- أثبت أه : $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$

ه- بيه أه $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

و استنتج أه $\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ أو $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ ليك $x_1; x_2; \dots; x_n \in \mathbb{R}^{+*}$

التمرين السابع

(1) بيه أه $(\forall x > 0) x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

(2) نضع $U_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ ليك عدد طبيعي غير منعدم n

أ- أحسب U_2 ; U_1

ب- بيه أه المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة (نذكر بأه $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

(3) نضع $V_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ ليك عدد طبيعي غير منعدم n . بيه أه المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثامن

ليك x عددا من $]0, +\infty[$ و نعتبر الدالة φ المعرفة بما يلي : $\varphi(t) = x^2(\ln(1+t) - t) - t^2(\ln(1+x) - x)$

(1) بيه أه الدالة φ تحقق شروط خاصية رول على المجال $[0, x]$

(2) استنتج أه يوجد عنصر c بحيث : $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-1}{2(1+c)}$

(3) استنتج أه $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

(4) حدد $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$